LinAlg - das Wichtigste in Kürze   Michael Baumgartner

Eigenschaften LGS

- Ein LGS mit erfüllten Verträglichkeitsbedingungen ist **konsistent**. (Sprich $b_{r+1}, \dots, b_m = 0$)
- Der Rang r ist die Anzahl nicht-null Zeilen / Spalten
- $r \mathrel{\hat{=}}$ Anzahl Pivot-Variablen
  ↳ es gibt $n-r$ freie Variablen / Parameter
- $A^{m \times n}$ bedeutet die Matrix A hat:
  - m Zeilen
  - n Spalten
- Ein LGS (und somit auch die dazugehörige Matrix) hat **mindestens eine Lösung** falls:
  - $r = m$
  - $r < m$ und LGS konsistent
- Ein LGS hat <u>genau eine eindeutige Lösung</u> falls $r = n$ und
  - $r = m$
  - Das LGS konsistent ist. (& $r < m$)
- Ein LGS hat **unendlich viele Lösungen mit $n-r$ freien Parametern** falls $r < n$ und
  - $r = m$
  - $r < m$ und LGS konsistent
- Ein **homogenes** LGS (HLGS) ist immer konsistent und besitzt immer die **triviale Lösung** $x = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$
- Falls $r < n$ besitzt das HLGS auch **nichttriviale Lösungen** (0 durch Linearkombination darstellbar)
- Sei $m = n$. Ein LGS $Ax = b$ ist genau dann für ein **beliebiges** b lösbar, wenn das **dazugehörige HLGS** $Ax = 0$ **nur** die triviale Lösung besitzt.

Eigenschaften Matrizen

- Man bezeichnet den Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Matrix A steht als a_{ij} / $(A)_{ij}$
- Falls alle Einträge zweier Matrizen übereinstimmen sprich $(A)_{ij} = (B)_{ij}\ \forall i,j$ nennt man sie gleich.
- Eine $n \times n$ Matrix heisst quadratische Matrix
- Eine Matrix mit orthonormalen Spaltenvektoren $\rightarrow$ nur normiert nennt man orthogonal. $(+\ A^T \cdot A = I)$ das alleine reicht nicht!
- Eine Matrix, für die $A = A^T$ gilt, nennt man symmetrisch ($A^T = -A \Leftrightarrow$ antisymmetrisch)
- Für die Nullmatrix gilt $a_{ij} = 0\ \forall i,j$
- Die quadratischen Matrizen R bzw. L heissen obere bzw. untere Dreiecksmatrix und es gilt
  - $r_{ij} = 0,\ \forall i > j$ $\begin{bmatrix} x & x & x \\ & x & x \\ 0 & & x \end{bmatrix}$
  - $L_{ij} = 0,\ \forall i < j$ $\begin{bmatrix} x & & 0 \\ x & x & \\ x & x & x \end{bmatrix}$
- Falls eine Matrix gleichzeitig L & R ist, nennt man sie Diagonalmatrix. (D)
  $\Rightarrow$ falls $d_{ij} = 1\ \forall i = j \Rightarrow$ Einheitsmatrix I_n (Dimension)
- Weitere typische Bezeichnungen:
  - Q : orth. Drehmatrix (z.B. Givens-Rotation)
  - H : orth. Spiegelungsmatrix (z.B. Householder)
  - T/S : (orth.) Transformations/Basiswechselmatrizen
  - U : $\Leftrightarrow R$ (oder aber auch die unitäre Matrix)
- Eine $n \times 1$ Matrix heisst Spaltenvektor
- Eine $1 \times n$ Matrix heisst Zeilenvektor

Die Transponierte

Wird mit A^T (A^H für komplexe Matrizen $\Leftrightarrow$ hermit transponiert) oder auch adjungierte M.
bezeichnet und es gilt:

(i) $(a_{ij})^T = a_{ji}$ $\quad ((a_{ij})^H = (\overline{a_{ij}})^T = \overline{a_{ji}})$ (wird also noch konjugiert)

(ii) $(A^{m\times n})^T = A^{n\times m}$ $\quad ((A^{m\times n})^H = \overline{A^{n\times m}})$

(iii) $(c\cdot A)^T = c\cdot A^T$ $\quad ((c\cdot A)^H = \bar{c}\cdot A^H)$

(iv) $(A_1+A_2)^T = A_1^T + A_2^T$ $\quad ((A_1+A_2)^H = A_1^H + A_2^H)$ auch für mehr!

(v) $(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)^T = A_n^T\cdot\ldots\cdot A_2^T\cdot A_1^T$ andere Reihenfolge!

$((A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)^H = A_n^H\cdot\ldots\cdot A_2^H\cdot A_1^H)$

(vi) $(A^T)^T = A$ $\quad ((A^H)^H = A)$

(vii) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ $\quad ((A^{-1})^H = (A^H)^{-1})$

(viii) $A^T = A \Leftrightarrow$ symmetrische Matrix

$(A^H = A \Leftrightarrow$ Hermitesche Matrix$)$

Die Inverse einer Matrix

Eine $n\times n$ Matrix A heisst invertierbar (oder regulär, nicht singulär), falls es eine Matrix B gibt, sodass: $A\cdot B = I_n$

Die Matrix B ist dann die Inverse von A und man bezeichnet sie mit A^{-1}.

- A^{-1} ist eindeutig bestimmt.
- Eine nicht invertierbare Matrix nennt man singulär

Eigenschaften

(i) $I^{-1} = I$

(ii) $(A^{-1})^{-1} = A$, $A^{-1}\cdot A = I$

(iii) $(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1}\cdot\ldots\cdot A_2^{-1} A_1^{-1} \Rightarrow (A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$

(iv) $(c\cdot A)^{-1} = c^{-1} A^{-1}$

(v) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$

(vi) $\text{rang}(A^{-1}) = \text{rang}(A) = n$ (da invertierbar)

(vii) $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

Orthogonale Matrizen (Im komplexen unitäre Matrizen $A^H \cdot A = I$)

Eine $n \times n$ Matrix A heisst orthogonal falls:

- $A^T \cdot A = I$
- ihre Spalten (und Zeilen) orthonormal sind, das heisst sie haben Betrag $= 1$ und liegen senkrecht Skalarprodukt $= 0$ aufeinander.

Eigenschaften (Gilt alles 1:1 auch für unitäre Matrizen)

(i) A ist invertierbar und es gilt $A^{-1} = A^T$

(ii) Das Produkt zweier orth. Matrizen $A \cdot B$ ist stets wieder orth. $\rightarrow (A \cdot B)^T (A \cdot B) = I$

(iii) Orthogonale Matrizen beschreiben längen- und winkeltreue Abbildungen, man nennt dies eine Kongruenzabbildung.

↳ verändert die euklidische Norm eines Vektors nicht:

$$\|Qx\|_2 = \|x\|_2$$

↳ das Skalarprodukt zweier Vektoren ist invariant bezüglich der Multiplikation mit einer orth. Matrix

$$\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$$

(iv) Für den Betrag der Determinanten einer orth. Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $|\det Q| = 1$

↳ ⚠ Auch nicht orth. Matrizen können $\det = \pm 1$ haben!

↳ $\det = 1 \Rightarrow$ Drehungen, eigentliche orth. Matrix

↳ $\det = -1 \Rightarrow$ Drehspiegelung, uneigentliche orth. Matrix

(v) Die Eigenwerte einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind nicht notwendigerweise alle reell, sie haben jedoch immer den komplexen Betrag eins, sie sind also von der Form $\lambda = e^{it}$. Eine orth. Matrix hat demnach nur die reellen EW ± 1, und die komplexen EV+EW treten immer paarweise konjugiert auf.

(vi) Eine orth. Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist normal, das heisst es gilt $QQ^T = Q^TQ$, und sie ist damit über den komplexen Zahlen unitär diagonalisierbar.

I.A. ist eine orth. Matrix jedoch nicht reell diagonalisierbar (i. Gz. z. symm. Matrizen siehe später)

Es existiert jedoch eine Normalform einer orthogonalen Matrix welche ausschliesslich reell ist.

Symmetrische Matrizen

Eine $n \times n$ Matrix heisst symmetrisch (hermitesch im Komplexen) falls gilt:

$$-A^T = A \qquad (A^H = A)$$

Eigenschaften (im Komplexen bis auf konjugationen identisch)

- $(A+B)^T = A^T + B^T = A + B \rightarrow$ Die Summe zweier symmetrischen Matrizen A, B ist stets wieder symm.
- Das Skalarprodukt cA ist wieder symmetrisch (auch im komplexen nur für reelle c)
- Das Produkt zweier symm. Matrizen A, B ist i.A. nicht wieder symmetrisch. Es ist genau dann wieder symm., wenn A & B kommutieren $\rightarrow AB = BA$
  ↳ insb. A^k $k \in \mathbb{N}$ & e^A sind wieder symmetrisch?
- Für eine beliebige Matrix $M \in K^{m \times n}$ sind sowohl die $m \times m$ Matrix MM^T als auch die $n \times n$ Matrix M^TM stets symmetrisch
- Jede Matrix $B \in K^{n \times n}$, die kongruent zu einer symm. Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist, ist ebenfalls symm., denn es gilt $B^T = (S^TAS)^T = S^TA^TS = S^TAS = B$
  ↳ gilt nicht für ähnliche Matrizen
- Ist die symm. Matrix invertierbar, so ist auch ihre Inverse wieder symmetrisch

- Eine symmetrische (oder hermitesche) Matrix ist stets normal, denn es gilt $A^TA = AA = AA^T$
- Es gilt Selbstadjungiertheit: $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$
- Die Eigenwerte einer symm. (o. herm.) Matrix sind stets reell.
- Algebraische und geometrische Vielfachheit stimmen immer überein.

  ↳ symm. (u. herm.) Matrizen sind immer Diagonalisierbar mit $A = SDS^{-1} \Leftrightarrow D = S^{-1}AS$, wobei S aus den EV von A aufgebaut ist, und auf der diag. von D die EW stehen. Sie sind des Weiteren sogar orthogonal diagonalisierbar, sprich $A = TDT^T \Leftrightarrow D = T^TAT$, T ist S mit normierten Spalten?
- $\mathrm{spur}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ (Summe d. EW)
- $\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$ (Produkt d. EW)
- $\mathrm{rang}(A) =$ Anz. EW $\neq 0$

Allgemeine Rechenregeln

(i) $A + B = B + A$

(ii) $A + B + C = A + (B + C)$

(iii) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

(iv) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

(v) $\alpha(A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(vi) $\alpha(\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(vii) i. A. gilt $A \cdot B \neq B \cdot A$

↳ falls das gilt, sagt man, A & B kommutieren